

TD 8 : Calculs de primitives et d'intégrales

Reconnaissance directe

Exercice 1: Déterminer une primitive des fonctions définies par les expressions suivantes sur l'intervalle proposé :

1. $p : x \mapsto \frac{x^3 - 2x^2 + x + 3}{4}$ sur \mathbb{R}
2. $g : x \mapsto \frac{3x^2}{(x^3 + 8)^3}$ sur $] - 2, +\infty[$
3. $h : x \mapsto e^{3x+2}$ sur \mathbb{R}
4. $f : x \mapsto \frac{3}{\sqrt{3x+1}}$ sur $] - \frac{1}{3}, +\infty[$

Exercice 2: Calculer les intégrales suivantes

1. $\int_0^1 \frac{e^t}{1+e^t} dt$
2. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(t) \cos(t) dt$
3. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 2x + 1}$
4. $\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2 + 2x + 1} dx$
5. $\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+2t^2}} dt$
6. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(t) dt$

Exercice 3: Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_e^{2e} \frac{1}{x \ln(x)} dx$
2. $\int_1^e \frac{\ln(x)}{x} dx$
3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(x) dx$

Avec IPP ou changement de variables

Exercice 4: Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_1^2 x \ln(x) dx$
2. $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{3x+1}} dx$
3. $\int_1^2 x \sin(x) dx$
4. $\int_1^2 x^2 e^x dx$

Exercice 5: Proposer une primitive des fonctions suivantes

1. $x \mapsto x \operatorname{Arctan}(x)$.
2. $x \mapsto \operatorname{Arcsin}(x)$.
3. $x \mapsto \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$.

Exercice 6: Calculer $\int_{\frac{1}{a}}^a \frac{\operatorname{Arctan}(x)}{x} dx$ pour $a > 0$.

Exercice 7: Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^1 \frac{2x}{1+x^4} dx$
2. $\int_1^2 \frac{x^2}{x^6 + 3x^3 + 2} dx$
3. $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x+1}} dx$ Indice CDV : $u = \sqrt{x+1}$
4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{5+3\cos(x)} dx$ Indice CDV : $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

Exercice 8: Proposer une primitive des fonctions suivantes par changement de variable :

1. $x \mapsto \frac{1}{\operatorname{sh}(x)}$.
2. $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x^3}}$.
3. $x \mapsto \frac{1}{\sin(x)}$. Indice CDV : $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

Intégrales de Wallis

Exercice 9: Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt$.

1. Calculer W_0 et W_1 . Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt$.
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$.
3. En déduire une expression de W_{2p} et de W_{2p+1} pour $p \in \mathbb{N}$.
4. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{n+2} \leq W_{n+1} \leq W_n$.
En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{W_{n+1}}{W_{n+2}}$.
5. Montrer que la suite $((n+1)W_n W_{n+1})$ est constante.
6. À l'aide d'un encadrement de W_n^2 , déterminer la limite de la suite $(\sqrt{n}W_n)$.