Chapitre 8 : Calculs de primitives et d'intégrales

Reconnaissance directe

Exercice 1: Déterminer une primitive des fonctions définies par les expressions suivantes sur l'intervalle proposé :

1. $p : x \mapsto \frac{x^3-2x^2+x+3}{4}$ sur $\mathbb{R}$
2. $g : x \mapsto \dfrac{3x^2}{(x^3+8)^3}$ sur $]-2, +\infty[$
3. $h : x \mapsto \mathbf{e}^{3x+2}$ sur $\mathbb{R}$
4. $f : x \mapsto \dfrac{3}{\sqrt{3x+1}}$ sur $]-\frac{1}{3}, +\infty[$

Exercice 2: Calculer les intégrales suivantes

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathbf{e}^t}{1+\mathbf{e}^t}\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(t)\cos(t)\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+2t^2}}\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(t)\mathrm{d}t.$

Exercice 3: Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_{\mathbf{e}}^{2\mathbf{e}} \frac{1}{x\ln(x)}\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_1^{\mathbf{e}} \frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathbf{e}^x\cos(x)\mathrm{d}x$

Avec IPP ou changement de variables

Exercice 4: Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^2 x\ln(x)\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_1^2 x\sin(x)\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_1^2 x^2\mathbf{e}^x\mathrm{d}x$

Exercice 5: Proposer une primitive des fonctions suivantes

1. $x \mapsto x\,\mathrm{Arctan}(x)$.
2. $x \mapsto \mathrm{Arcsin}(x)$.
3. $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$.

Exercice 6: Calculer $\displaystyle\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{\mathrm{Arctan}(x)}{x}\mathrm{d}x$ pour $a > 0$.

Exercice 7: Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+1}$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+2x+1}\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x^2}{1+x^6}\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{5+3\cos(x)}\mathrm{d}x$ *Indice :* $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

Exercice 8: Proposer une primitive des fonctions suivantes par changement de variable :

1. $x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{sh}(x)}$.
2. $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x^3}}$.
3. $x \mapsto \dfrac{1}{\sin(x)}$. *Indice :* $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

Intégrales de Wallis

Exercice 9: Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\mathrm{d}t$.

1. Calculer W_0 et W_1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\mathrm{d}t$.
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}W_n$.
3. En déduire une expression de W_{2p} et de W_{2p+1} pour $p \in \mathbb{N}$.
4. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{n+2} \leqslant W_{n+1} \leqslant W_n$.
   En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{W_{n+1}}{W_{n+2}}$.
5. Montrer que la suite $((n+1)W_nW_{n+1})$ est constante.
6. À l'aide d'un encadrement de W_n^2, déterminer la limite de la suite $(\sqrt{n}W_n)$.